www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

page 74 E.N.S. de LYON
1989 1 Opt.Sc.Nat.-

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

Le problème comporte deux parties indépendantes qui seront traitées sur des feuilles séparées.

PARTIE I

1° On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'application g de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) = e^{-x}\ln(1+e^{x}) \quad ; \quad g(t) = \frac{t}{1+t} - \ln(1+t).$$

a) Démontrer que : $\forall\, t \geq 0$, $g(t) \leq 0$.

b) Etudier les variations de f et tracer son graphe (l'étude d'éventuels points d'inflexion ne sera pas abordée).

c) Déterminer les fonctions numériques u, de la variable réelle x, solutions de l'équation différentielle :

$$u'(x) + u(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$$

d) Déterminer le développement limité d'ordre 3 de f(x), au voisinage de 0.

2° Soit X une variable aléatoire, à valeurs réelles, de densité de probabilité

$$h : x \to \lambda\, e^{-|x|}\ln(1+e^{|x|}) \text{ , } \forall\, x \in \mathbb{R},$$

où λ est une constante réelle positive.

a) Calculer λ. Calculer la probabilité p de l'évènement "$|X| < 1$".

b) Montrer que l'espérance de X existe et donner sa valeur.

c) Déterminer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = X^2$.

d) On considère un ensemble $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. On note $P_n(E)$ la probabilité de l'évènement E défini par: "la moitié au moins de ces n variables prennent une valeur comprise entre - 1 et + 1". Donner, en fonction de p, une expression de $P_n(E)$ lorsque n = 4. Ecrire une intégrale permettant d'obtenir une valeur approchée de $P_n(E)$ lorsque n = 10 000.
Evaluer, dans les deux cas, la valeur numérique de $P_n(E)$.

PARTIE II

On désigne par $\mathfrak{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Si V = (x,y,z) et V' = (x', y', z') sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, leur produit scalaire, noté $\langle V,V' \rangle$, est défini par :

$$\langle V,V' \rangle = xx' + yy' + zz'$$

Les vecteurs V et V' sont dits orthogonaux si l'on a : $\langle V,V' \rangle = 0$

Soient F et G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ définis par :

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0\}$$

$$G = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x - 2y + z = 0\}$$

1° Donner une base de $F \cap G$.

2° Construire la base $\mathfrak{B}' = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, possédant les propriétés :

- $\mathfrak{B}'_1 = \{v_1, v_2\}$ est une base de F.
- $\mathfrak{B}'_2 = \{v_1, v_3\}$ est une base de G.
- Les vecteurs v_1, v_2, v_3 sont orthogonaux deux à deux.
- La première composante de chacun des vecteurs v_1, v_2, v_3 est égale à un.

3° Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice, relativement à la base $\mathfrak{B}$, est :

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer que l'image de f est F.

b) Déterminer le noyau de f.

4° On considère maintenant l'application linéaire : $f_F : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \to F \\ V \to f(V) \end{cases}$

a) Ecrire la matrice A_F de f_F, relativement aux bases $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'_1$.

b) Ecrire la matrice B_F de f_F, relativement aux bases $\mathfrak{B}$ et $\mathfrak{B}'_1$.

c) Ecrire une relation liant A_F et B_F.

5° Soit g l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice, relativement à la base $\mathfrak{B}$, est :

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Vérifier que l'image de g est G.

b) Montrer que f et g ont même noyau.

6° a) Montrer qu'il existe une application linéaire α, de F dans G, unique, telle que :

$$\forall\, V \in \mathbb{R}^3,\ \alpha[f(V)] = g(V)$$

b) Ecrire la matrice D de α, relativement aux bases $\mathfrak{B}'_1$ et $\mathfrak{B}'_2$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail